

제2판
Elementary Differential Geometry

미분기하학

Andrew Pressley 지음
전재복 · 채영도 · 김병학 옮김



교우사

ELEMENTARY DIFFERENTIAL GEOMETRY

Translation from English language edition:

Elementary Differential Geometry

by A.N. Pressley

Copyright © 2010 Springer London

Springer London is a part of Springer Science+Business Media

All Rights Reserved

Korean translation copyright © 2015 by Kyowoosa Publishing Co.

Korean translation rights arranged with Springer Science+Business Media
through EYA(Eric Yang Agency).

이 책의 한국어판 저작권은 EYA(Eric Yang Agency)를 통해
Springer Science+Business Media와 독점계약한 '교우사'에 있습니다.
저작권법에 의해 한국 내에서 보호를 받는 저작물이므로
무단전재와 복제를 금합니다.

본 교재의 제목인 “미분기하학”은 미적분을 사용하여 3차원 공간에서 곡선과 곡면의 기하학을 연구하는 것이다. 이 주제는 수학에서 가장 아름다운 몇 가지 이론을 포함하고 있으며, 대부분은 광범위한 배경지식이 없어도 이해할 수 있다. 사실상 본 교재에서 필요한 사전 지식은 편미분을 포함한 미적분학, 행렬과 행렬식을 포함한 벡터해석학과 선형대수학 정도면 충분하다.

본 교재에서 다루는 곡선과 곡면에 관한 대부분의 이론은 고차원 공간의 환경에서 적용되는 더 일반적인 이론들에 대한 본보기이다. 예를 들면, 제11장에서 다루는 가우스-본네의 정리는 기하학의 국소적 특징과 대역적 특징을 잇는 많은 이론들의 모델이다. 두 특징의 연관성에 대한 연구는 20세기 수학에서 중요한 주제로 자리매김을 하고 있다.

그러나 본 교재에서 사용하는 방법들은 반드시 고차원 공간의 환경으로 일반화되지 않는다는 것을 강조하고 싶다. 오히려 언제든지 바라는 결과를 얻을 수 있는 가장 간단한 방법을 사용하려고 노력했다. 더욱이 사전 지식을 최소화하려고 했을 뿐만 아니라, 고차원 공간에서 미분기하학을 고려할 때 가끔 만나는 개념상의 어려움을 피할 수도 있다. 이러한 방법으로 많은 독자들이 기하학의 아름다운 주제에 접근할 수 있기를 바란다.

상투적인 문구에도 불구하고 사실이지만, 수학이란 소설을 읽듯이 읽어서 되는 학문이 아니고, 그것을 수행, 즉 풀어 봄으로써 알 수 있는 학문이다. 따라서 본 교재는 200문제 이상의 연습문제를 수록하고 있다. 독자들은 능력이 허용하는 대로 연습문제를 해결하려고 시도해야 한다. 연습문제에 대한 전체적인 해답을 교재의 끝 부분에 실어두었지만, 먼저 독자 스스로 풀어 본 다음이거나 도저히 해결할 수 없을 경우에만 참조하길 바란다. 쉽지 않은 문제들에는 힌트를 주어서 자포자기의 경우를 최소화하려고 노력하였다.

보통 어떤 책이든 제2판이 나올 때 양이 적어지는 책은 거의 없고, 이 교재도 그런 책 중의 하나지만 제2판에서 가장 많이 추가된 곳은 쌍곡(또는 비유클리드)기하학 부분이다. 대부분 합리적으로 이 주제에 대한 기본적인 취급법은 평면기하학의 유클리드적인 공리적 방법을 흉내 내는 것이다. 중요한 결과에 대한 대부분 빠른 길을 이용할 수 있지만, 곡면 미분기하학의 기초들은 이미 확립되어 있어서 그것을 이용할 수 없다는 게 안타까웠다.

다른 두 가지 가장 중요한 변화는 초판에서 해설자들이 제안을 했는데, 그 중 하나는 접평면을 보다 더 기하학적으로 취급하였으며 이것을 나중에 우리들로 하여금 사물을 (행렬처럼 보다도) 기하학적 대상으로 제1, 제2기본형식과 와인가르텐 사상 같은 것을 정의할 수 있게 한다. 둘째는 평행이동을 활용하는 것이다. 이 교재의 기본정신을 유지하고자 하는 제안에 아주 일부는 동의했지만, 제2판에서는 평행이동을 정의하였고 이것은 측지선과 가우스곡률에 연결되어 있다. (그러나 이 교재를 읽는 전문가들을 위하여 접촉의 소개를 별문제로 하고 그만두었다.)

작은 변화들을 나열하기엔 너무나 많지만, 아마도 저는 (가우스-본네의 응용으로서) 지도채색에 관한 절과 구면기하학에 대한 독립적인 취급을 말하고 싶다. 그것에 대한 본질적인 재미는 차치하더라도 구면기하학은 가장 간단한 ‘비유클리드’기하학을 제공하며 여러 관점에서 이것은 사촌간인 쌍곡기하학과 닮아있다. 또한 초판에서 저나 투고자들(대부분은 투고자들이지만)이 지적한 많은 잘못을 수정하였다.

이 교재로 강의하려는 분들을 위하여, 저는 11, 12, 13장 중 하나를 끝내고 1-10장으로부터 필요한 기본적인 것들을 이해하는 식으로 한 학기에 끝낼 수 있는 세 가지 길이 있다는 점을 제안한다. 예를 들면 구면기하학 상에서 새로운 절은 강의의 마지막 목표가 쌍곡기하학일 경우에만 다룬다.

초판에서와 같이 모든 연습문제에 대한 해답을 교재 끝부분에 실었다. 해답 대부분은 전 세계적으로 학생들은 좋아했지만 교수들은 대체로 싫어했다! 저도 한 사람의 교육자로서 교육자들의 입장을 이해하고, 굳이 말씀드리면 이런 문제를 해결하기 위해서 교재의 모든 독자들이 온라인상에서 접근할 수 있는 새로운 연습문제를 고안하였으며 교육자들을 위하여 문제를 해답집과 함께 www.springer.com에 실어 두었다.

초보학생부터 전문가에 이르기까지 초판에 제안을 보내 준 모든 사람들에게 감사를 표한다. 저는 모든 분들의 제안을 그대로 쫓아 하진 않았지만! 저는 그들을 정중히 대했고, 제2판의 독자들은 이 교재에 내용을 바꾼 것이 더욱 유익하고 흥미로운 결과를 낳았다는 데 동의하기를 희망한다.

수학은 모든 교과목의 기초로서는 물론, 인간의 삶을 풍요롭게 해주는 필수교과목이다. 과거 10여 년 동안 수학과 교과과정에는 많은 변화가 있었지만 그 중에서도 미분기하학 교재들의 전개방식은 추상적이면서 매우 구조적이고 이론 지향적이어서 독자들로 하여금 쉽게 흥미를 잃어버리게 한 결과를 낳았고, 미분기하학을 아주 어려운 과목으로 만드는데 일조를 하였다. 기하학은 다른 과목과는 달리 단순 계산보다는 정리나 공식마다 개념의 의미를 부여해야한다는 점이다. 아무리 복잡한 식도 의미를 이해하면(의미에 대한 설명 때문에 학생들이 기하학을 어려워하는 이유이기도 하지만) 더욱 흥미가 생긴다. 영국 킹스칼리지(King's College)의 수학과 교수로 재직하고 있는 원저자인 앤드류 프레슬리(Andrew Pressley) 교수는 이 분야의 탁월한 연구자로서 미분기하학에 관하여 독자 위주로 이해하기 쉽고 좋은 교재들을 다수 집필한 뛰어난 저술가이다.

원저자는 이 교재를 통하여 미분기하학을 초심자 위주의 매우 쉬운 방법으로 풀어가고 있다. 3차원 이상의 추상적인 일반화를 피하면서 독자들로 하여금 명확한 이해에 이르도록 논리를 전개하고 있다. 미분기하학 이론들을 설명하는데 있어서 가능한 한 추상적인 방법들은 배제하고 가장 단순하고 직관적인 방법들을 사용하고 있다. 공변미분 개념 대신 국소좌표계에 관한 도함수를 사용하고, 접속의 개념을 언급하는 대신에 이동좌표계를 사용하고 있으며, 크리스토펠 기호를 언급하지만 필요한 곳에서만 한정적으로 사용하는데 그치고 있는 것이 대표적이다. 특히 완전한 해답을 주고 있는 200여개의 연습문제는 독자들로 하여금 본 교재를 통하여 공부한 이론과 개념을 스스로 확인할 수 있도록 하고 있으며 응용력을 높이는데 큰 도움을 줄 것이다.

역자들은 프레슬리 교수의 학부수준인 미분기하학 교육의 관점에 동의한다. 더 이상 미분기하학을 접근하기 어렵고 배우기 까다로운 과목이라는 오랫동안 굳어있던 선입견에서 탈피하고, 이제는 더욱 흥미롭고 재미있으며 누구나 쉽게 펼쳐서 볼 수 있는 친근한 교과목으로 자리매김하는데 일조하기 위해서 우리말로 번역하게 되었다. 이러한 취지를 살려 수학을 전공하는 학생들은 물론 물리학, 공학 등 미분기하학의 지식을 필요로 하는 관련 분야의 연구자들에게도 많은 도움이 되기를 기대한다.

마지막으로 어려운 시기임에도 수학에 대한 열정 하나로 기꺼이 출판하여 주신 교우사 오판근 사장님과 편집부의 적극적인 협조에 지면을 통하여 감사드린다.

2015년 1월

역자 일동

제1장 평면과 공간상의 곡선 / 1

1.1 곡선이란 무엇인가?	2
1.2 호의 길이	9
1.3 재매개변수화	13
1.4 폐곡선	19
1.5 등위곡선 대 매개변수화된 곡선	22

제2장 곡선이 얼마나 굽었는가? / 29

2.1 곡률	30
2.2 평면곡선	35
2.3 공간곡선	46

제3장 곡선의 대역적 성질 / 57

3.1 단순폐곡선	58
3.2 등주부등식	60
3.3 네 꼭지점 정리	65

제4장 3차원상의 곡면 / 69

4.1 곡면이란 무엇인가?	70
4.2 매끄러운 곡면	78
4.3 매끄러운 사상	84
4.4 접선과 도함수	87
4.5 법선과 방향성	91

제5장 곡면의 예 / 95

5.1 등위곡면	96
5.2 이차곡면	97
5.3 선직면과 회전면	103
5.4 긴밀곡면	108

5.5 삼중직교계	110
5.6 역함수정리의 응용	114

제6장 제1기본형식 / 119

6.1 곡면상의 곡선의 길이	120
6.2 곡면상의 등장변환	124
6.3 곡면상의 등각사상	130
6.4 등적변환과 아르키메데스 정리	137
6.5 구면기하학	145

제7장 곡면의 곡률 / 153

7.1 제2기본형식	154
7.2 가우스 사상과 와인가르텐 사상	157
7.3 법곡률과 측지곡률	160
7.4 평행이동과 공변미분	164

제8장 가우스 곡률, 평균곡률과 주곡률 / 171

8.1 가우스 곡률과 평균곡률	172
8.2 곡면의 주곡률	179
8.3 가우스 곡률이 상수인 곡면	187
8.4 평탄한 곡면	191
8.5 평균곡률이 상수인 곡면	198
8.6 긴밀곡면의 가우스 곡률	202

제9장 측지선 / 205

9.1 정의와 기본성질	206
9.2 측지방정식	210
9.3 회전면의 측지선	216
9.4 최단경로로서의 측지선	224
9.5 측지좌표	231

제10장 가우스의 위대한 정리 / 235

10.1 가우스와 코다찌-마이나르디 방정식	236
10.2 가우스의 위대한 정리	240
10.3 가우스 곡률이 상수인 곡면	245
10.4 측지사상	251

제11장 쌍곡기하학 / 257

11.1 상반 평면 모델	258
11.2 $\mathcal{H}$ 의 등장사상	265
11.3 푸앵카레 원판모델	270
11.4 쌍곡적 평행선	276
11.5 벨트라미-클라인 모델	281

제12장 극소곡면 / 291

12.1 플라토 문제	292
12.2 극소곡면의 예	298
12.3 극소곡면의 가우스 사상	307
12.4 극소곡면의 등각 매개변수화	308
12.5 극소곡면과 정칙함수	311

제13장 가우스-본네 정리 / 321

13.1 단순폐곡선에 관한 가우스-본네 정리	322
13.2 굽은 다각형에 대한 가우스-본네 정리	328
13.3 긴밀곡면상의 적분	332
13.4 긴밀곡면에 대한 가우스-본네 정리	335
13.5 지도 채색	343
13.6 홀로노미와 가우스 곡률	348
13.7 벡터장의 특이점들	351
13.8 임계점	356

- 부록 / 363
- 연습문제 힌트 / 381
- 연습문제 해답 / 387
- 찾아보기 / 451



제1장

평면과 공간상의 곡선

-
- 1.1 곡선이란 무엇인가
 - 1.2 호의 길이
 - 1.3 재매개변수화
 - 1.4 폐곡선
 - 1.5 등위곡선 대 매개변수화된 곡선
-

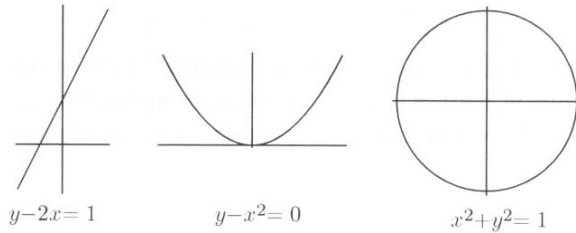
제1장

평면과 공간상의 곡선

이 장에서는 곡선의 직관적 개념에 대한 두 가지 수학적 공식화를 다룬다. 그들 사이의 구체적인 관계가 미묘해서 각각에 대한 몇 가지 예와 상호 유도하는 실질적인 방법을 먼저 제공하고자 한다.

1.1 곡선이란 무엇인가?

곡선의 예로서 $y - 2x = 1$ 과 같은 직선(비록 굽어있지 않더라도)이나 $x^2 + y^2 = 1$ 로 주어지는 원 또는 $y - x^2 = 0$ 과 같은 포물선을 들 수 있다.



이런 곡선들은 모두 f 가 x 와 y 에 관한 함수이고 c 가 상수일 때, 직교좌표방정식

$$f(x, y) = c$$

로 나타낼 수 있다. 이런 관점에서, 곡선은 점의 집합 즉,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\} \quad (1.1)$$

이다.

이런 곡선들은 모두 평면 $\mathbb{R}^2$ 안에 들어있지만 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서도 생각할 수 있다. 예를 들면, $\mathbb{R}^3$ 에서 x -축은

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$

으로 주어지는 직선이며, 보다 일반적으로 $\mathbb{R}^3$ 에서의 곡선은 방정식들의 쌍

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2$$

로 정의할 수 있다.

이러한 종류의 곡선들을 **등위곡선(level curve)**이라 하는데, 그 개념은 예를 들어 방정식 (1.1)로 주어지는 곡선은 평면에서 값 $f(x, y)$ 가 ‘높이’ c 에 이르는 점 (x, y) 들의 집합을 나타낸다.

그러나 여러 가지 상황에서 보다 유용하다고 판명된 또 다른 곡선의 표현방법이 있다. 그것은 곡선을 움직이는 점의 자취로 보는 것이다.

따라서 만일 $\gamma(t)$ 가 시각 t 일 때, 한 점의 위치벡터라면 곡선은 평면곡선의 경우는 $\mathbb{R}^2$ 에서 그리고 공간곡선의 경우는 $\mathbb{R}^3$ 에서 벡터값을 갖는 스칼라 매개변수 t 에 관한 함수 γ 로써 나타난다. 이러한 아이디어를 $\mathbb{R}^n$ 상의 곡선에 관한 첫 번째 공식적인 정의를 내리는데 사용한다(우리는 $n = 2, 3$ 인 경우에만 관심이 있지만 두 경우를 동시에 취급하는 것이 편리하다).

정의 1.1.1

$\mathbb{R}^n$ 상에서 **매개변수화된 곡선**(parametrized curve)은 $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$ 안의 어떤 α, β 에 대하여 사상

$$\gamma: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

으로 정의한다.

기호 (α, β) 는 열린구간

$$(\alpha, \beta) = \{t \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha < t < \beta\}$$

를 나타낸다.

상이 등위곡선 C 에 포함되는 매개변수화된 곡선을 C (또는 그의 일부분)의 **매개변수화**(parametrization)라고 한다. 다음의 예는 등위곡선으로부터 매개변수화된 곡선까지 어떻게 지나가는가를 보여주며 또 그 역과정을 보여준다.

예제 1.1.2 포물선 $y = x^2$ 의 매개변수화를 구해보자. 만일 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ 라면, γ 의 성분 γ_1 과 γ_2 가 γ 가 정의되는 구간 (α, β) 안의 모든 t 값에 대하여

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)^2 \tag{1.2}$$

를 만족하고 개념상으로 포물선 위의 모든 점은 구간 (α, β) 안의 어떤 t 값에 대하여 $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ 와 같아야한다. 물론 포물선 위의 모든 점을 얻기 위하여 t 는 모든 실수값을 갖도록 해야 한다($\gamma(t)$ 의 x -좌표가 t 이므로 포물선 위의 한 점의 x -좌표는 임의의 실수값이다). 따라서 (α, β) 는 $(-\infty, \infty)$ 라야 한다. 그러므로 원하는 매개변수화는

$$\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, t^2)$$

이다. 그렇지만 이것만이 포물선의 매개변수화인 것은 아니다.

$(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ 일 때, $\gamma(t) = (t^3, t^6)$ 도 또 다른 매개변수화가 될 수 있다. $(2t, 4t^2)$ 도 마찬가지이며 또 다른 매개변수화도 무수히 많다. 그러므로 어떤 주어진 등위곡선의 매개변수화는 하나만

있는 것이 아니다.

예제 1.1.3 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 매개변수화를 구해 보자. 앞의 예와 같이 $x = t$ 로 두면 $y = \sqrt{1-t^2}$ 이다($y = -\sqrt{1-t^2}$ 으로도 가능하다). 따라서 매개변수화는 다음과 같다.

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

그러나 이것은 상반원에 대해서는 유일한 매개변수화이다.

왜냐하면 $\sqrt{1-t^2} \geq 0$ 이기 때문이다. 같은 모양으로 만일 $y = -\sqrt{1-t^2}$ 을 취한다면 이것은 하반원에 대한 매개변수화이다.

만일 원 전체에 대한 매개변수화를 원한다면 달리 시도해야만 한다. 모든 $t \in (\alpha, \beta)$ 에 대하여

$$\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2 = 1 \quad (1.3)$$

이고 원주 위의 모든 점이 어떤 $t \in (\alpha, \beta)$ 에 대하여 $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ 와 같은 함수 $r_1(t)$ 와 $r_2(t)$ 가 필요하다. 방정식 (1.3)에 대한 해 $\gamma_1(t) = \cos t$, $\gamma_2(t) = \sin t$ 가 있다(왜냐하면 t 의 모든 값에 대하여 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 이기 때문이다).

$(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ 로 잡지만, 이것은 지나친 면도 있다. 길이가 2π 보다 긴 열린구간이면 충분하다.

반대로 다음의 예는 매개변수화된 곡선으로부터 등위곡선을 어떻게 유도해 내는가를 보여준다.

예제 1.1.4 별모양 곡선(astroid)이라 부르는 매개변수화된 곡선

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

를 보자. 모든 t 에 대하여 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 이므로, 점 $\gamma(t)$ 의 좌표 $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ 는

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

을 만족한다. 이 등위곡선은 사상 γ 의 상과 일치한다. 별모양곡선의 그림은 연습문제 1.1.5를 참조하여라.

이 교재에서 곡선(그리고 나중에는 곡면)을 미적분을 이용하여 고찰한다. 그러한 곡선과 곡면은 대개 미분가능한 함수에 관한 항으로 표현한다:

함수 $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ 은 만일 모든 $n \geq 1$ 과 $t \in (\alpha, \beta)$ 에 대하여 도함수 $\frac{d^n f}{dt^n}$ 이 존재할 때 매끄럽다(미분가능하다)고 한다. 만일 $f(t)$ 와 $g(t)$ 가 매끄러운 함수라면, 그들이 정의되는 곳에서 $f(t) + g(t)$ 와 곱 $f(t)g(t)$, 몫 $f(t)/g(t)$ 그리고 합성함수 $f(g(t))$ 도 매끄러운 함수이다.

정의 1.1.1에서처럼 $\gamma(t)$ 와 같은 벡터값 함수를 미분하기 위해서는 성분별로 미분한다; 만일

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

라면

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left(\frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}, \dots, \frac{d\gamma_n}{dt} \right), \quad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left(\frac{d^2\gamma_1}{dt^2}, \frac{d^2\gamma_2}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\gamma_n}{dt^2} \right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

등과 같다. 간단하게 나타내기 위하여 $\frac{d\gamma}{dt}$ 를 $\dot{\gamma}(t)$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ 을 $\ddot{\gamma}(t)$ 와 같이 나타낸다.

γ 의 각 성분 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 이 매끄러운(smooth) 함수일 때, γ 를 매끄러운 함수라고 한다. 모든 $n \geq 1$ 과 $t \in (\alpha, \beta)$ 에 대하여 도함수 $\frac{d^n \gamma}{dt^n}$ 가 존재할 때 γ 는 매끄럽다고 한다. 이것은 γ 의 각 성분 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 이 매끄러운 것과 동치이다.

지금부터, 이 교재에서 고려하는 모든 매개변수화된 곡선은 전부 매끄럽다고 가정한다.

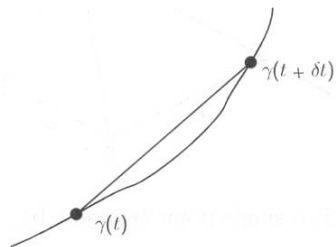
정의 1.1.5

$\gamma(t)$ 가 매개변수화된 곡선일 때, 도함수 $\frac{d\gamma}{dt}$ 는 점 $\gamma(t)$ 에서 γ 의 접선벡터(tangent vector)라고 한다.

그 이유를 알아보기 위하여, 벡터

$$\frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

는 γ 의 상인 곡선 C 의 두 점 $\gamma(t)$ 와 $\gamma(t + \delta t)$ 를 잇는 현과 평행하다는 것을 알 수 있다.



δt 가 0에 가까워질 때 현의 길이도 0에 가까워지지만, 현의 방향이 $\gamma(t)$ 에서 C 의 접선방향과 평행하게 될 것을 기대한다. 그러나 현의 방향은 벡터

$$\frac{\gamma(t + \delta t) - \gamma(t)}{\delta t}$$

의 방향과 같고, 이 벡터는 δt 가 0에 가까워질 때 $d\gamma/dt$ 에 가까워진다. 물론 이것은 $d\gamma/dt$ 가 영이 아

닐 때, 곡선에 접하는 방향을 결정한다. 만일 그 조건이 성립하면, 곡선 C 의 점 $\mathbf{p}$ 에서 C 의 접선(tangent line)을 점 $\mathbf{p}$ 를 지나고 벡터 $d\gamma/dt$ 에 평행한 직선으로 정의한다.

다음 결과는 직관적으로 분명하다.

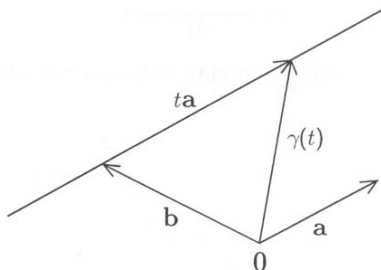
명제 1.1.6 매개변수화된 곡선의 접선벡터가 상수(일정)라면, 곡선의 상은 직선(또는 그의 일부)이다.

[증명] $\mathbf{a}$ 가 상수벡터일 때, 모든 t 에 관하여 $\gamma(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ 라면, 이를 성분별로 적분하여 다음을 얻는다.

$$\gamma(t) = \int \frac{d\gamma}{dt} dt = \int \mathbf{a} dt = t\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

단 $\mathbf{b}$ 는 다른 상수벡터이다. 만일 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 라면, 이것은 $\mathbf{b}$ 를 지나고 $\mathbf{a}$ 에 평행한 직선의 매개변수 방정식이다.

만일 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 이면, γ 의 상은 한 점이다(즉 $\mathbf{b}$ 를 위치벡터로 갖는 점).



곡선에 관하여 더욱 깊게 탐구를 하기 전에, 매개변수화된 곡선을 논할 때 혼동의 가능성이 있는 원인을 지적한다. 그러한 곡선상의 ‘점’이 무엇인가라는 질문에 관한 것이다. 다음 예에서 그러한 어려움을 볼 수 있다.

예제 1.1.7 와우선(리마송)은 매개변수화된 곡선(아래 그림을 보아라)

$$\gamma(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t, (1 + 2\cos t)\sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

이다.

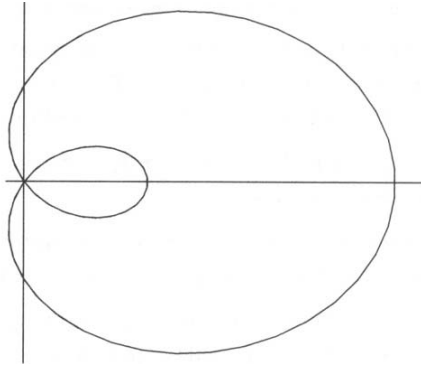
γ 는 $t = 2\pi/3$ 과 $t = 4\pi/3$ 일 때 $\gamma(t) = \mathbf{0}$ 이라는 의미로 원점에서 자신과 만난다. 접선벡터는

$$\gamma'(t) = (-\sin t - 2\sin 2t, \cos t + 2\cos 2t)$$

이다. 특히,

$$\gamma'(2\pi/3) = (\sqrt{3}/2, -3/2), \gamma'(4\pi/3) = (-\sqrt{3}/2, -3/2)$$

이다. 원점에서 이 곡선의 접선벡터는 무엇일까? 비록 $\gamma'(t)$ 는 모든 t 의 값에서 정의되지만, $t = 2\pi/3$ 와 $t = 4\pi/3$ 에서 다른 값을 갖는데 둘 다 이것은 곡선위에서 원점에 해당한다.



이 예는 매개변수화된 곡선 γ 의 ‘점’에 대하여 얘기할 때 주의해야한다는 점을 보여주고 있다. 엄격히 말하자면, 이것은 곡선 매개변수 t 의 값으로 같아야 하고, 대응하는 기하학적 점 $\gamma(t) \in \mathbb{R}$ 으로서는 같지 않다. 따라서 정의 1.1.5는 “ $\gamma(t)$ 가 매개변수화된 곡선일 때, 일차도함수 $\gamma'(t)$ 는 매개변수 값 t 에서 γ 의 접선벡터라고 한다.”라고 읽어야 한다. 그렇지만 기하학적 관점과 구별짓고 정의 1.1.5를 얘기할 때 범하는 잘못을 자주 반복하는 이런 차이점을 주장하기 위해서인 것 같다. 그래서 앞서 얘기한 주의점을 명심하면 혼동이 생기지 않을 것이다.



연습문제

1.1.1 $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ 은 포물선 $y = x^2$ 의 매개변수화인가?

1.1.2 다음 등위곡선들의 매개변수화를 구하여라.

$$(1) y^2 - x^2 = 1 \qquad (2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

1.1.3 다음 매개변수화된 곡선들의 직교좌표 방정식을 구하여라.

$$(1) \gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t) \qquad (2) \gamma(t) = (e^t, t^2)$$

1.1.4 문제 1.1.3의 곡선들의 접선벡터를 구하여라.

1.1.5 예제 1.1.4의 별모양곡선을 스케치하고 각 점에서 접선벡터를 구하여라. 어느 점에서 접선벡터가 영인가?